Kombinatoriske Spil

Noter til QGM Math Club
af Tobias Kildetoft

1 Forord

Disse noter er i stor grad baseret på bogen Lessons in Play af Michael H. Albert, Richard J. Nowakowski og David Wolfe (fra nu af kaldet LiP).

Jeg har i de fleste tilfælde benyttet samme notation som i LiP, men der er et par steder, hvor jeg har valgt at afvige fra denne. Især er betegnelserne for typer af spil ændret, da de kommer fra forbogstavet i navnet på typen, og da disse navne er blevet oversat til dansk, fandt jeg det mere naturligt også at ændre betegnelserne (samtidig er L generelt ændret til V og R til H de steder, hvor bogstavet står for henholdsvis venstre og højre). Derudover benytter jeg G^V og G^H for mængderne af henholdsvis venstre- og højremuligheder i spillet G, hvor LiP benytter $\mathcal{G}^L$ og $\mathcal{G}^R$, mens G^L og G^R der benyttes for et givet spil i en af disse mængder.

Disse noter er beregnet til at kunne læses af en gymnasieelev. Dog benyttes der en smule om mængder, og der forventes en smule kendskab til induktion.

Appendiks A er en meget kort introduktion til mængder, som indeholder tilstrækkeligt til at forstå disse noter.

Appendiks B er en introduktion til induktion.

Appendiks C indeholder spilleregler til de spil, der benyttes som eksempler i disse noter.

Hvis man efter at have læst disse noter har fået lyst til at vide mere om emnet, kan LiP anbefales, selvom det bør nævnes at den er skrevet til folk med noget større matematisk baggrund (svarende til 1-2 års universitetsstudier).

Ideen er, at man læser disse noter inden QGM Math Club. Forelæsningerne vil så gennemgå visse dele i detaljer, og man har derfor forhåbentlig en god ide om hvad emnet handler om inden øvelserne. Som minimum bør introduktionen læses.

Mens du læser disse noter bør du lave en liste over de definitioner og den notation der indføres. Denne liste vil være en stor hjælp når du skal løse opgaver.

Til sidst en beroligende kommentar: Selvom det forventes at du læser disse noter, forventes det langt fra at du kan huske det hele udenad (der er trods alt en hel del at læse). Det vigtigste er at du får en fornemmelse for, hvad et kombinatorisk spil er.

2 Introduktion

2.1 Kombinatoriske spil

Kombinatoriske spil er spil for to personer, hvor der ikke er nogen form for tilfældighed indvolveret. Dette vil sige at der ikke er nogen terninger eller lignende, at der ikke er information, som kun er til rådighed for den ene af spillerne, og at spillerne skiftes til at have tur. Vi vil få en mere præcis definition af, hvad et kombinatorisk spil er senere, men for nu vil vi se på nogle eksempler. Vi giver eksempler både på kombinatoriske spil og på spil, som ikke er kombinatoriske, da dette vil give en bedre ide om hvad der kræves af et kombinatorisk spil.

Typiske eksempler på kombinatoriske spil inkluderer skak, Go, dam, mølle, Hex, kryds og bolle, og fire på stribe.

Eksempler på spil, som ikke er kombinatoriske er:

- Backgammon: Dette er ikke et kombinatorisk spil, da en spillers muligheder afgøres af et terningslag hver tur, hvilket giver et element af tilfældighed.

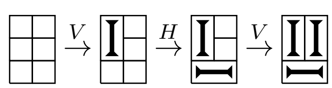
- Sænke Slagskibe: Dette er ikke et kombinatorisk spil, da hver spiller kun kender positionen af sine egne skibe (dette er hele pointen med spillet).

- Sten-Saks-Papir: Dette er ikke et kombinatorisk spil, da de to spillere tager deres tur samtidig, i stedet for at skiftes.

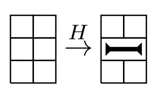
- Kinaskak (med 3 spillere): Dette er ikke et kombinatorisk spil, da der er 3 spillere i stedet for 2.

Et yderligere eksempel på et kombinatorisk spil, som vil blive benyttet adskillige gange i disse noter er spillet Domineering. Reglerne er at finde i appendiks C.

Et meget simpelt eksempel på hvordan et spil Domineering kan foregå er følgende (vi skriver $\xrightarrow{V}$ for at indikere at den spiller, som placerer vertikalt, tager et træk, og vi skriver $\xrightarrow{H}$ for at indikere at den spiller, som placerer horisontalt, tager et træk).



hvor den spiller, der spiller horisontalt, taber, da han ikke har nogen lovlige træk, og det er hans tur til at trække. Hvis det i stedet var den anden spiller, der startede, kunne spillet se således ud



hvorved den spiller, der spiller vertikalt, taber, da han ikke har nogen lovlige træk (på trods af at der her er masser af tomme felter).

Inden du læser videre bør du gøre følgende: Spil nogle spil Domineering (for eksempel startende med et 6 gange 6 bræt), enten mod dig selv eller mod en anden.

Efter at have spillet nogle spil Domineering skulle du gerne have bemærket at spillebrættet, efter et passende antal ture, har en tendens til at blive opdelt i mindre dele. Dette er et vigtigt koncept, som vi vil udforske nærmere senere.

En ting, som måske vil virke lidt mærkelig i første omgang er, at når vi studerer kombinatoriske spil vil vi betragte hver position i et kombinatorisk spil som et kombinatorisk spil i sig selv. Så for eksempel når første spiller har foretaget et træk i Domineering opstår der en position, som vi kan analysere som om det var et kombinatorisk spil, uden at tage hensyn til at det er opstået som en position efter første træk i et andet spil.

Dette betyder at vi, når vi analyserer et spil, ikke kan antage at en bestemt af spillerne har tur. Grunden til at dette er "det rigtige" at gøre er, at når et spil splitter op i mindre dele, sådan som Domineering for eksempel har en tendens til, vil vi gerne kunne analysere hver af disse små dele hver for sig, og vi kan ikke på forhånd sige noget om hvilken spiller der kommer til at foretage det første træk i den givne del.

Inden vi går videre vil vi nu præcisere hvad et kombinatorisk spil er.

Som allerede nævnt er det et spil for 2 spillere, hvor spillerne skiftes til at tage sin tur, hvor der ikke er nogen tilfældigheder (mere præcist vil dette sige at man kan forudsige nøjagtigt hvad der vil ske hvis man foretager et bestemt træk), og hvor al information er tilgængelig til begge spillere (så ud over at der ikke må være information, som kun den ene spiller har, må der heller ikke være information som ingen af spillerne kender).

Et kombinatorisk spil må heller ikke indvolvere nogen form for fysiske evner (så det eneste der kræves for at foretage et træk er at det er lovligt. Man vil aldrig være ude af stand til at foretage et træk fordi det er for "svært", så spil såsom tennis er ikke kombinatoriske).

Udover disse krav skal spillet være endeligt. Det vil sige, at der altid er et endeligt antal mulige træk, og at spillet ikke kan fortsætte i det uendelige. Teknisk set betyder dette, at vi burde udelukke visse af de spil, der allerede er blevet nævnt (det er for eksempel muligt at få spillet til at køre i ring i Go og dam, så det aldrig slutter), men i sådanne tilfælde kan man beslutte en måde at afgøre spillet hvis det ender i en uendelig lykke (dette er for eksempel grunden til at man i skak har en regel der siger, at spillet er uafgjort, hvis nok træk er blevet foretaget uden at enten en bonde er blevet flyttet, eller en brik er blevet taget).

Yderligere vil vi altid antage at spillet slutter når den ene spiller ikke har et lovligt træk, og denne spiller taber. De fleste velkendte spil spilles ikke på denne måde, men for det meste er det simpelt at ændre dette, ved at sige at hvis man har tabt, så har man ikke nogen lovlige træk (hvis spillet afgøres på point er man nødt til at være lidt mere kreativ. Vi vil se senere hvordan man kan klare dette). Bemærk at denne måde at spille på udelukker muligheden for uafgjort, hvilket egentlig burde udelukke en del af de velkendte spil. Der er forskellige måder at omgå dette på, men vi vil ikke gå i detaljer med disse.

De spil vi vil analysere i disse noter vil altid opfylde ovenstående krav.

2.2 Spillerne og typer af spil

Siden et kombinatorisk spil har 2 spillere, vil vi vælge faste navne til dem. I disse noter vil de to spillere hedde Venstre og Højre (eller bare V og H, hvilket så stemmer overens med at den spiller i Domineering, som spiller vertikalt er V, og den spiller, som spiller horisontalt, er H). Vi vil også bruge betegnelsen Næste om den spiller, der har tur, og Foregående om den spiller, som ikke har tur (som lige har haft tur). Disse forkortes N og F.

Når vi analyserer et spil vil det første spørgsmål vi stiller for det meste være "hvem kan vinde?" Eller med andre ord "hvem har en vindende strategi?"

En spiller siges at have en vindende strategi hvis han, uanset hvad modstanderen gør, kan vinde (så for hvert træk modstanderen laver har han et modtræk). I et kombinatorisk spil vil der altid findes en vindende strategi for en af spillerne, men hvilken spiller kan afhænge af hvem der har tur.

Vi får nu en naturlig opdeling af kombinatoriske spil i forhold til hvem der har en vindende strategi:

- Venstre har en vindende strategi, uanset om han er Næste eller Foregående. Sådanne spil siges at være Type $\mathcal{V}$. Disse spil kaldes også positive.

- Højre har en vindende strategi, uanset om han er Næste eller Foregående. Sådanne spil siges at være Type $\mathcal{H}$. Disse spil kaldes også negative.

- Næste har en vindende strategi, uanset om han er Venstre eller Højre. Sådanne spil siges at være Type $\mathcal{N}$. Disse spil kaldes også uklare.

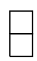
- Foregående har en vindende strategi, uanset om han er Venstre eller Højre. Sådanne spil siges at være Type $\mathcal{F}$. Disse spil kaldes også nul-spil (eller bare nul).

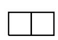
Det er ikke helt oplagt at overstående faktisk er samtlige muligheder. For eksempel, hvad med muligheden for at Venstre har en vindende strategi hvis han er Næste, men ellers har Højre en vindende strategi? Men bemærk at hvis ikke Venstre er Næste, så er Højre Næste, så dette scenarie er et spil af Type $\mathcal{N}$. Tilsvarende vil alle andre muligheder som disse være dækket af ovenstående.

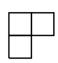
Du bør også nu tage et øjeblik og overveje, at der ikke er noget overlap i ovenstående typer, altså at det ikke kan lade sig gøre for et spil at være af mere end en type.

Begrundelserne for de alternative navne til overstående spiltyper (positive, negative, uklare og nul) vil blive forklaret senere (der er faktisk en god grund).

Inden vi går videre vil vi se på et eksempel for et spil af hver af de fire typer. Disse eksempler er alle positioner i Domineering (du bør verificere at de givne spil faktisk er af den påståede type).

 er af type $\mathcal{V}$

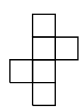
 er af type $\mathcal{H}$

 er af type $\mathcal{N}$

 er af type $\mathcal{F}$

Opgave 2.1. Find en Domineering-position af hver type (og forskellig fra de ovenstående).

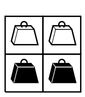
Opgave 2.2. Betragt følgende Domineering-position:

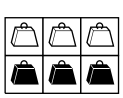


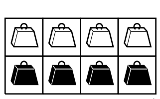
1. Find samtlige måder spillet kan forløbe på, uanset hvem der starter.

2. Find typen af spillet.

Opgave 2.3. Find typen af følgende Clobber-positioner.

1. 

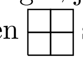
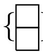
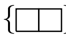
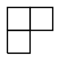
2. 

3.  (Hint: Bemærk at den spiller, der ikke starter, hele tiden kan foretage træk, som er symmetriske med den anden spillers træk).

2.3 Muligheder

Som allerede nævnt vil vi betragte positionerne i et kombinatorisk spil som værende kombinatoriske spil. Ligeledes vil vi betragte et træk i et kombinatorisk spil som værende et kombinatorisk spil (vi identificerer et træk med den position trækket resulterer i).

Hvis G er et kombinatorisk spil vil vi lade G^V og G^H betegne de mulige træk for henholdsvis Venstre og Højre. I lyset af overstående betyder dette så at G^V og G^H er mængder af kombinatoriske spil. Disse mængder kaldes (henholdsvis venstre- og højre-)mulighederne i G.

Hvis for eksempel G er Domineering-positionen  så er $G^V = \{$$\}$ og $G^H = \{$$\}$, mens hvis G er positionen  så er $G^V = G^H = \{$$\}$.

Vi vil nu give en beskrivelse af hvilken type spillet G er, baseret på hvilke typer af spil der findes i G^V og G^H.

- G er af type $\mathcal{V}$ netop hvis der findes et spil i G^V af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{F}$, og samtlige spil i G^H enten er af type $\mathcal{V}$ eller af type $\mathcal{N}$.

- G er af type $\mathcal{H}$ netop hvis samtlige spil i G^V enten er af type $\mathcal{H}$ eller af type $\mathcal{N}$ og der findes et spil i G^H af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{F}$.

- G er af type $\mathcal{N}$ netop hvis der findes et spil i G^V af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{F}$ og der findes et spil i G^H af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{F}$.

- G er af type $\mathcal{F}$ netop hvis samtlige spil i G^V er af type enten $\mathcal{N}$ eller $\mathcal{H}$ og samtlige spil i G^H er af type enten $\mathcal{N}$ eller $\mathcal{V}$.

Vi vil ikke gennemgå et fuldt bevis for ovenstående, men lad os for en god ordens skyld tage et af tilfældende: Type $\mathcal{V}$.

Kravet er nu at Venstre skal kunne vinde, uanset om det er hans tur eller ej.

Hvis det er hans tur skal han altså have mulighed for at rykke til et spil, hvor Venstre vinder når han ikke har tur. De spil der opfylder dette er netop dem af type $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{F}$.

Hvis Venstre ikke har tur må Højre altså ikke kunne rykke til andet end spil, hvor Venstre vindes hvis han har tur. Det vil sige at de eneste spil Højre må kunne rykke til er dem af type $\mathcal{V}$ eller af type $\mathcal{N}$.

Dette viser at hvis G er af type $\mathcal{V}$, så må mulighederne i G være som beskrevet i listen.

Hvis på den anden side mulighederne i G er som beskrevet, så ser vi at Venstre har en vindende strategi: Hvis det er Venstres tur, så vælger han et træk af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{F}$ (og vi har jo antaget at han har en sådan mulighed), hvorved han kan vinde. Hvis det er Højres tur, så kan han ikke vinde lige meget hvad han gør, da han jo kun kan rykke til spil af type $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{N}$ (og disse vindes jo af Venstre når det er Venstre der har tur).

Opgave 2.4. Verificer at beskrivelsen af de resterende typer også er korrekt.

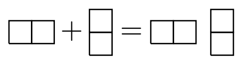
2.4 Addition af spil

Hvis du nu har spillet nogle spil Domineering, opdagede du forhåbentlig at spillet ofte ender med at blive opdelt i mindre dele efterhånden som brættet fyldes op. Denne form for opdeling er hvad vi vil forsøge at udnytte til lettere at kunne analysere spil.

For at gøre dette, vender vi på sin vis problemet på hovedet. I stedet for at kigge på hvad der sker, hvis et spil deles op i mindre dele, vil vi starte med de mindre dele og samle dem til et større spil.

Måden at sætte spil sammen på er som sådan meget enkel: Læg de to spil ved siden af hinanden. En spiller foretager et træk i dette nye spil ved at foretage et træk i præcis et af de oprindelige spil. Vi vil kalde dette nye spil summen af de to mindre spil, og hvis G_1 og G_2 er de to spil vi lægger sammen, så betegner vi summen $G_1 + G_2$.

Dette svarer til den opdeling man kan se i Domineering. Hvis spillebrættet er blevet opdelt i to dele er spillet netop summen af disse dele. Dette betyder at vi for eksempel bare har



Vi vil nu give en beskrivelse af typen af G_1+G_2 i forhold til typerne af G_1 og G_2. I visse tilfælde kan vi fuldstændig beskrive typen, mens vi i andre tilfælde er nødt til at nøjes med en ufuldstændig beskrivelse.

$+$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	ukendt	$\mathcal{V}$ eller $\mathcal{N}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{H}$	ukendt	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}$ eller $\mathcal{N}$	$\mathcal{H}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{V}$ eller $\mathcal{N}$	$\mathcal{H}$ eller $\mathcal{N}$	ukendt	$\mathcal{N}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{F}$

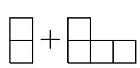
Nogle ting der bør bemærkes ved ovenstående: Hvis G_2 er af type $\mathcal{F}$, så er typen af $G_1 + G_2$ den samme som typen af G_1. Dette betyder at når vi lægger spil sammen, så ændrer det ikke noget hvis vi lægger et spil af type $\mathcal{F}$ til. Dette er grunden til at disse spil også kaldes nul-spil.

Bemærk også at de steder, hvor det er sværest at sige noget om typen af G_1+G_2 er hvor enten det ene spil er af type $\mathcal{V}$ og det andet er af type $\mathcal{H}$, eller hvor det ene af spillene er af type $\mathcal{N}$ og det andet ikke er af type $\mathcal{F}$. Specielt er det eneste tilfælde hvor vi på forhånd kan sige hvad typen af G_1+G_2 vil være, når G_1 er af type $\mathcal{N}$, hvis G_2 er af type $\mathcal{F}$. Dette er grunden til at spil af type $\mathcal{N}$ kaldes uklare (da det er uklart hvad der sker når man lægger dem til andre spil).

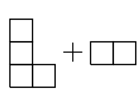
Begrundelsen for at spil af type $\mathcal{V}$ og $\mathcal{H}$ kaldes henholdsvis positive og negative kommer til at vente lidt endnu.

Lad os nu se på eksempler der viser at ovenstående ikke er mangelfuldt, altså at i de tilfælde, hvor der ikke er en komplet beskrivelse af typen af en sum, så er det faktisk muligt at få alle de nævnte typer. Hvis vi for et øjeblik misbruger notationen lidt og skriver spil som deres typer, skal vi finde eksempler på følgende (bemærk at når vi har haft eksempler på alle typer for $\mathcal{V}+\mathcal{H}$ så har vi også eksempler for $\mathcal{H}+\mathcal{V}$):

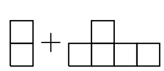
- $\mathcal{V}+\mathcal{H}=\mathcal{V}$:



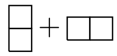
- $\mathcal{V}+\mathcal{H}=\mathcal{H}$:



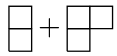
- $\mathcal{V}+\mathcal{H}=\mathcal{N}$:



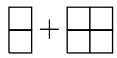
- $\mathcal{V} + \mathcal{H} = \mathcal{F}$:



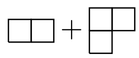
- $\mathcal{V} + \mathcal{N} = \mathcal{V}$:



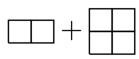
- $\mathcal{V} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$:



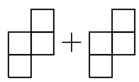
- $\mathcal{H} + \mathcal{N} = \mathcal{H}$:



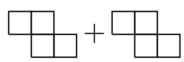
- $\mathcal{H} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$:



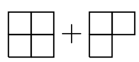
- $\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{V}$:



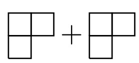
- $\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{H}$:



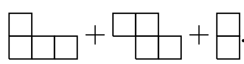
- $\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$:



- $\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{F}$:



Opgave 2.5. Verificer at ovenstående faktisk er eksempler på det påståede.

Opgave 2.6. Find typen af Domineering-positionen .

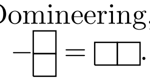
2.5 Identifikation af spil

Som allerede nævnt er det første spørgsmål vi vil stille om et givet spil hvilken type det har. Men vores analyse vil ofte være begrænset til at kigge på de enkelte dele af spillet, en ad gangen, og som vi kan se fra tabellen i foregående sektion, så er det ikke nok at kende typerne af de spil, der indgår i en sum, for at kende typen af summen.

Dog er der en undtagelse til dette. Hvis et spil er af type $\mathcal{F}$, så er det underordnet hvilken sum det indgår i, da det ikke ændrer på typen af summen hvis man fjernede det.

Vi vil derfor identificere alle spil af type $\mathcal{F}$ med hinanden, og blot kalde dem alle for 0.

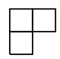
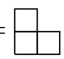
Vi kan bygge lidt videre på denne ide. Hvis G er et spil vil vi definere et spil der kaldes $-G$, på en sådan måde at $G + -G = 0$ (altså sådan så $G + -G$ er af type $\mathcal{F}$). Måden vi definerer dette spil på er simpel: Vi bytter bare om på de to spillere. På denne måde vil summen blive af type $\mathcal{F}$, da den spiller, der ikke starter, altid kan efterabe det træk, den anden laver.

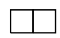
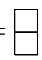
For eksempel, hvis G er et spil Domineering, så er $-G$ det samme spil, roteret 90 grader. På denne måde ser vi at for eksempel er .

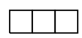
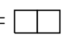
Med denne definition kan vi nu tage vores identifikation af spil en tand videre, og identificere to spil G_1 og G_2 hvis $G_1 + -G_2$ (vi vil fra nu af blot skrive dette som $G_1 - G_2$) er af type $\mathcal{F}$. Dette giver fin intuitiv mening (i det mindste når vi bare ser på notationen), da vi jo er vant til at $a = b$ hvis og kun hvis $a - b = 0$, og vi har netop sagt at vi idenficerer G_1 og G_2 hvis $G_1 - G_2 = 0$.

Vi vil fra nu af endda skrive $G_1 = G_2$ når $G_1 - G_2 = 0$.

Vi får nu for eksempel følgende identifikationer:

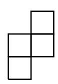
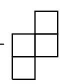
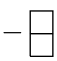
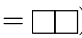
 = 

   = 

 = 

Opgave 2.7. Verificer overstående identifikationer.

Opgave 2.8. Vis at

 +  =  (husk at −  = )

2.6 Positive og negative spil

Vi er nu nået dertil, hvor vi kan forklare hvorfor spil af type $\mathcal{V}$ kaldes positive og spil af type $\mathcal{H}$ kaldes negative. Desværre vil forklaringen muligvis ikke være særlig tilfredsstillende. Hvis G er et spil vil vi nemlig skrive $G > 0$ hvis G er af type $\mathcal{V}$, og $G < 0$ hvis G er af type $\mathcal{H}$. Det er nu klart hvorfor vi vil kalde disse spil positive og negative, men vi har ikke rigtig gjort andet end at indføre noget notation.

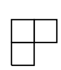
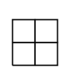
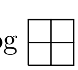
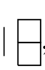
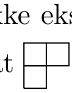
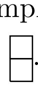
Vi vil derfor prøve at gøre denne notation naturlig. Vi er vant til at hvis $a \leq b$ så er også $a + c \leq b + c$ uanset hvad c er. Vi er også vant til at hvis $a \leq b$ og $c \leq d$ så er $a + c \leq b + d$. Da vi jo allerede har en addition af vores spil ville det være rart hvis de samme regler galdt for spil. Men indtil nu har vi kun defineret $<$ og $>$ (i stedet for $\leq$ og $\geq$), og vi kan indtil nu kun sætte 0 på højresiden af en ulighed.

For at råde bod på dette må vi arbejde lidt. Først vil vi udvide $<$ og $>$ sådan så man kan have vilkårlige spil på begge sider. Husk at vi er vant til at $a < b$ gælder hvis og kun hvis $a - b < 0$ (og tilsvarende for $>$). Da vi jo i foregående sektion definerede en måde at trække spil fra hinanden på virker det oplagt at prøve at definere $<$ og $>$ for spil via denne egenskab.

Så hvis G_1 og G_2 er spil skriver vi $G_1 < G_2$ hvis $G_1 - G_2 < 0$ (altså hvis forskellen har type $\mathcal{H}$). Tilsvarende skriver vi $G_1 > G_2$ hvis $G_1 - G_2 > 0$ (altså hvis forskellen har type $\mathcal{V}$). Bemærk at vi nu har $G < 0$ hvis og kun hvis $-G > 0$.

For at udvide til også at få $\leq$ og $\geq$ gør vi som man også gør for tal: Vi skriver $G_1 \leq G_2$ hvis enten $G_1 < G_2$ eller $G_1 = G_2$, og tilsvarende for $\geq$.

Bemærk at der findes spil G_1 og G_2, sådan så ingen af $G_1 < G_2$, $G_1 = G_2$ eller $G_1 > G_2$ gælder (for eksempel hvis G_2 er af type $\mathcal{F}$ og G_1 er af type $\mathcal{N}$). Når dette er tilfældet skriver vi $G_1 \mid\mid G_2$ og siger at G_1 og G_2 er usammenlignelige.

Nogle specifikke eksempler på usammenlignelige spil er at  $\mid\mid$  og  $\mid\mid$ , mens der til gengæld gælder at  $<$ .

Nu da vi har defineret $\leq$ og $\geq$ vil vi gerne undersøge om disse så også opfylder de egenskaber vi startede med at betragte (spørgsmålet er altså: Givet tre spil G_1, G_2 og G_3 med $G_1 \leq G_2$, har vi $G_1 + G_3 \leq G_2 + G_3$? Og givet fire spil G_1, G_2, G_3 og G_4 med $G_1 \leq G_2$ og $G_3 \leq G_4$, har vi $G_1 + G_3 \leq G_2 + G_4$?).

Svaret på overstående spørgsmål er heldigvis ja, så lad os formulere dette som en sætning og bevise den.

Sætning 2.9. *Lad G_1, G_2, G_3 og G_4 være spil.*

1. *Hvis $G_1 \leq G_2$ så er $G_1 + G_3 \leq G_2 + G_3$.*

2. *Hvis $G_1 \leq G_2$ og $G_3 \leq G_4$ så er $G_1 + G_3 \leq G_2 + G_4$.*

Bevis.

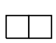
1. Vi antager altså at $G_1 \leq G_2$, og vi vil gerne vise at $G_1 + G_3 \leq G_2 + G_3$. Per definition betyder dette at vi skal vise at $G_1 + G_3 + -G_2 + -G_3 \leq 0$. Men vi kan ændre på rækkefølgen i summen uden at det gør noget, så vi kan skrive dette som $G_1 + -G_2 + G_3 + -G_3 \leq 0$. Men nu er venstresiden netop $G_1 + -G_2$, og $G_1 + -G_2 \leq 0$ er jo det samme som $G_1 \leq G_2$, som var vores antagelse, så vi er færdige.

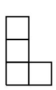
2. Vi antager at $G_1 \leq G_2$ og $G_3 \leq G_4$, og vi vil vise at $G_1 + G_3 \leq G_2 + G_4$. Vi skal altså vise at $G_1 + G_3 + -G_2 + -G_4 \leq 0$. Igen kan vi ændre på rækkefølgen hvilket giver $(G_1 + -G_2) + (G_3 + -G_4) \leq 0$. Per antagelse er $G_1 + -G_2$ og $G_3 + -G_4$ begge af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{F}$ (dette er jo definitionen af $G_1 \leq G_2$ og $G_3 \leq G_4$), og det vi skal vise er at deres sum er af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{F}$, men dette er klart hvis man kigger på tabellen på side 6.

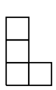
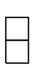
$\square$

Opgave 2.10. Vis at hvis G_1, G_2 og G_3 er kombinatoriske spil med $G_1 \leq G_2$ og $G_2 \leq G_3$ så er $G_1 \leq G_3$. (Hint: Husk at $G_2 - G_2 = 0$).

Opgave 2.11. Vis følgende uligheder mellem Domineering-positioner.

1.  < 0

2.  > 0

3.  $<$ 

3 Mere formelt

3.1 Formel definition af kombinatoriske spil

Nu da vi har en god fornemmelse for hvad et kombinatorisk spil er for en størrelse, vil vi starte forfra med definitionen. Denne gang vil vi gøre alting mere formelt og matematisk. Dette vil have to konsekvenser: Den første er at det vil blive meget nemmere for os at bevise ting om sådanne spil. Den anden er at vi i definitionen hurtigt mister fornemmelsen for hvad tingene i virkeligheden repræsenterer (altså spil), hvilket er hvorfor vi først giver den formelle definition nu, hvor vi har fået denne fornemmelse.

Ideen bag den matematiske definition er at et kombinatorisk spil er bestemt ved hvilke muligheder Venstre og Højre har.

Definition 3.1. Et kombinatorisk spil er en ting af form $G = \{G^V \mid G^H\}$ hvor G^V og G^H er endelige mængder, sådan så alle elementer i G^V er kombinatoriske spil og alle elementer i G^H er kombinatoriske spil.

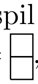
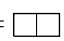
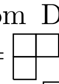
En del der læser dette vil nok tænke "Hov stop! Den går da ikke", da vi jo nu tilsyneladende skal bruge et kombinatorisk spil for at definere et kombinatorisk spil.

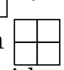
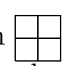
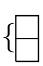
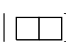
Og det er der selvfølgelig noget om. Grunden til at dette er i orden er at kravet er at alle elementerne i de to mængder skal være kombinatoriske spil, men der er ikke noget krav om at der skal findes elementer i nogen af de to mængder. Det vil sige, at hvis $G^V = G^H = \emptyset$, så er $\{G^V \mid G^H\}$ et kombinatorisk spil. Dette er et meget simpelt kombinatorisk spil, da ingen af de to spillere har nogen lovlige træk, men det er dog et kombinatorisk spil. Faktisk kan vi let finde et spil Domineering med disse G^V og G^H, nemlig spillet .

Siden vi nu har et kombinatorisk spil, kan vi benytte dette til at konstruere yderligere spil. På denne måde får vi spillene

- $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$
- $1 = \{0 \mid \emptyset\}$
- $-1 = \{\emptyset \mid 0\}$
- $* = \{0 \mid 0\}$

Bemærk at hvis der kun er et enkelt element G_1 i G^V eller G^H, så skriver vi blot G_1 i stedet for $\{G_1\}$ i G. Generelt vil vi forsøge at undgå for mange par af $\{\}$ indeholdt i hinanden, så vi vil benytte følgende notation: Erstat $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ med $G_1, G_2, \ldots, G_n$, så for eksempel $\{\{G_1, G_2\} \mid \{G_3, G_4\}\}$ bliver til $\{G_1, G_2 \mid G_3, G_4\}$.

De ovenstående spil kan realiseres som Domineering spil som følger (check selv at disse er korrekte): $0 =$ , $1 =$ , $-1 =$  og $* =$ .

Vi kan nu skrive Domineering-positionen  formelt som  $= \{$ $\mid$ $\}$.

Nu har vi så 4 kombinatoriske spil at arbejde med, og vi kan benytte disse til at skabe yderligere spil. På en måde bliver spillene mere og mere indviklede når vi gør dette (der skal foretages flere og flere af disse skridt for at kunne definere de næste spil). For at kunne gøre denne kompleksitet mere præcis vil vi indføre fødselsdagen for et spil som følger.

Definition 3.2. Lad $G = \{G^V \mid G^H\}$ være et kombinatorisk spil. Vi definerer fødselsdagen for G, skrevet $fd(G)$ som følger: Hvis $G = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ er $fd(G) = 0$. Ellers er $fd(G) = m + 1$ hvor m den største fødselsdag blandt spillene i $G^V \cup G^H$.

Nu har vi så at alle de spil der er defineret ovenfor (pånær 0) har fødselsdag 1. Man kunne nu fortsætte ved at skrive alle de spil ned, der har fødselsdag 2. Men dette ville allerede blive uoverskueligt, da der umiddelbart er 252 muligheder for spil med fødseldag 2 (man skal vælge en mængde af spil til hver af G^V og G^H, og der er 16 muligheder for at vælge en delmængde af de fire spil med fødselsdag 0 eller 1, hvilket giver 256 spil, hvoraf 4 har fødselsdag 0 eller 1, så disse skal trækkes fra). Dog viser det sig at mange af disse spil faktisk vil være ens (vi definerer den formelle identifikation af kombinatoriske spil lidt senere, men den er essentielt set den samme som vi benyttede i den mindre formelle del), og at der kun er 22 forskellige. Men dette er stadig betydelig flere spil end vi har lyst til at skulle skrive ned her.

Vi kan nu definere addition af kombinatoriske spil på en mere formel måde. Når du læser definitionen, så husk hvad den egentlig betyder. Det er stadig intuitivt den samme definition som vi havde tidligere, vi har bare oversat dette til den nye notation. For at lette notationen vil vi benytte følgende konvention: Hvis G er et spil og $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ er en mængde af spil, så skriver vi $G + A = \{G + A_1, G + A_2, \ldots, G + A_n\}$. Hvis A er tom, så er $G + A$ også tom per konvention.

Definition 3.3. Lad $G_1 = \{G_1^V \mid G_1^H\}$ og $G_2 = \{G_2^V \mid G_2^H\}$ være kombinatoriske spil. Vi definerer $G_1 + G_2 = \{(G_1 + G_2^V) \cup (G_1^V + G_2) \mid (G_1 + G_2^H) \cup (G_1^H + G_2)\}$

Ligesom da vi definerede kombinatoriske spil, har vi nu benyttet additionen af kombinatoriske spil til at definere addition af kombinatoriske spil. Denne gang er det i orden siden i alle de summer, der skal udregnes ifølge definitionen, vil summen af fødselsdagene for de to summander være mindre end summen af fødselsdagene for G_1 og G_2 (så da vi godt kan lægge spil med fødselsdag 0 sammen, kan vi antage at vi ved hvordan man lægger spil sammen når summen af deres fødselsdage er mindre end $fd(G_1) + fd(G_2)$, og dette er nok til at lægge G_1 og G_2 sammen).

Vi vil gerne beholde den identifikation af kombinatoriske spil, som vi indførte tidligere. Men nu vil vi gerne gøre det hele lidt mere formelt, så vi skal have defineret $-G$ for et kombinatorisk spil G, denne gang hvor G er givet som i den formelle definition. Igen vil vi lette notationen ved at benytte følgende konvention: Hvis $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ er en mængde af kombinatoriske spil, så skriver vi $-A = \{-A_1, -A_2, \ldots, -A_n\}$.

Definition 3.4. Lad $G = \{G^V \mid G^H\}$ være et kombinatorisk spil. Vi definerer $-G = \{-G^H \mid -G^V\}$.

Endnu en gang har vi defineret noget rekursivt, men igen er det hele i orden da ovenstående giver fin mening hvis $G = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ (hvor vi bare får $-G = G$). Og da alle spil i G^V og G^H har mindre fødselsdag end G, kan vi benytte et tilsvarende argument som da vi definerede addition.

Da vi definerede vores identifikation af spil benyttede vi at spil af type $\mathcal{F}$ opførte sig som 0 i forhold til addition. For at kunne definere denne identifikation nu har vi altså brug for at vide hvordan man finder typen af et spil når det er givet på den formelle måde. Men dette klares let ved at se på beskrivelsen på side 5 og simpelt hen benytte denne beskrivelse som vores definition.

Definition 3.5. Lad $G = \{G^V \mid G^H\}$ være et kombinatorisk spil. G siges at være af type

- $\mathcal{V}$ hvis der findes et spil af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{F}$ i G^V og samtlige spil i G^H er af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{N}$.
- $\mathcal{H}$ hvis samtlige spil i G^V er af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{N}$ og der findes et spil i G^H af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{N}$ hvis der findes et spil i G^V af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{F}$ og der findes et spil i G^H af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ hvis samtlige spil i G^V er af type enten $\mathcal{H}$ eller $\mathcal{N}$ og samtlige spil i G^H er af type enten $\mathcal{V}$ eller $\mathcal{N}$.

Som i de andre definitioner benytter vi at fødselsdagene for spillene i G^V og G^H er mindre end $fd(G)$, og at spillet 0 klart opfylder den sidste betingelse, så dette er af type $\mathcal{F}$.

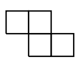
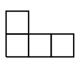
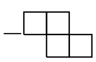
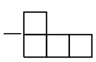
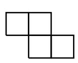
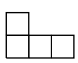
Vi kan nu definere vores identifikation præcis som vi gjorde det oprindeligt. Hvis G_1 og G_2 er kombinatoriske spil skriver vi $G_1 = G_2$ hvis $G_1 - G_2$ er af type $\mathcal{F}$ (hvilket vi også skriver $G_1 - G_2 = 0$). Det er vigtigt at huske at vi fra nu af bruger $=$ på denne måde, så to spil $G_1 = \{G_1^V \mid G_1^H\}$ og $G_2 = \{G_2^V \mid G_2^H\}$ kan godt opfylde $G_1 = G_2$ selvom der ikke gælder $G_1^V = G_2^V$ og $G_1^H = G_2^H$ (disse mængder behøver ikke engang have samme størrelse).

Vores ulighed fra tidligere kan også defineres på præcis samme måde (husk, at vi definerede $G_1 < G_2$ til at betyde at $G_1 - G_2$ var af type $\mathcal{H}$ og tilsvarende for de andre mulige uligheder).

Opgave 3.6. Betragt spillene med fødselsdag 0 og 1 (altså spillene 0, 1, -1 og $*$).

Vis at der gælder $-1 < 0 < 1$ og $-1 < * < 1$ men at 0 og $*$ er usammenlignelige.

Opgave 3.7. Opskriv følgende Domineering-positioner i den formelle notation.

1. 
2. 
3. $-$
4. $-$
5.  $+$ 

3.2 Tal

Vi har allerede set eksempler på kombinatoriske spil, der opfører sig som tal, nemlig spillene 1 og -1. Med at opføre sig som tal menes at hvis spillet 1 lægges til et andet spil, så har Venstre netop et ekstra træk i denne sum i forhold til hvad han havde før (hvilket han naturligvis vil være glad for).

Mere generelt, hvis n er et naturligt tal kan vi definere spillet $n = \{n-1 \mid \emptyset\}$ (hvor $n-1$ er spillet $n-1$ som igen er defineret via spillet $n-2$ og så videre, indtil vi kommer til spillet $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$). Tilsvarende kan vi definere spillet $-n = \{\emptyset \mid -(n-1)\}$. Ligesom for spillet 1 vil Venstre nu få n ekstra træk i et spil hvis man lægger spillet n til.

Disse spil kan nu bruges som en analog til point. Hvis et spil bliver afgjort på point, så kan man hver gang en spiller får et antal point, lægge det tilsvarende antal point til i form af spillet n, hvor n er antallet af point hvis det er point til Venstre, og i form af spillet $-n$ hvis det er point til Højre. At dette ikke vil gøre andet ved spillet end at svare til at den pågældende spiller har fået et antal point følger af Sætning 3.19 (som siger at spillerne ikke har nogen grund til at benytte disse tilføjede spil til at foretage deres træk).

Men der er faktisk også spil, som opfører sig på samme måde som disse, men svarende til brøker. For eksempel kan vi definere spillet $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$. Men hvorfor giver det mening at kalde dette spil for $\frac{1}{2}$? Får Venstre et halvt ekstra træk hvis dette spil lægges til? På en måde er dette netop hvad der sker: Halvdelen af gangene dette spil lægges til vil Venstre få et ekstra træk, og halvdelen af gangene vil han ikke (dette er selvfølgelig noget løst sagt).

Men vi kan komme med yderligere gode grunde til at dette spil skal kaldes $\frac{1}{2}$: For det første har vi $0 < \frac{1}{2} < 1$, og for det andet har vi $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Så i disse henseender opfører det sig i hvert fald som det burde. Desværre gælder disse samme ting for spillet $\frac{1}{2} + *$, så vi er nødt til at gøre lidt mere for at retfærdiggøre at vi kalder det $\frac{1}{2}$.

Vi vil derfor definere mere abstrakt hvad det vil sige for et kombinatorisk spil at være et Tal. Bemærk at når vi skriver Tal (med stort T), så mener vi et kombinatorisk spil, som opfylder nedenstående definition, mens vi med tal vil mene et tal i den sædvanlige forstand (på denne måde undgår vi misforståelser).

Definition 3.8. Et kombinatorisk spil $G = \{G^V \mid G^H\}$ siges at være et Tal hvis der for ethvert spil G_1 i G^V og ethvert spil G_2 i G^H gælder at G_1 og G_2 er Tal og $G_1 < G < G_2$.

Denne definition kræver nok noget forklaring. For det første giver den igen kun mening fordi spillene i G^V og G^H har mindre fødselsdag end G. Men hvorfor er dette overhoved en logisk måde at definere et Tal på?

Ideen bag definitionen er at vi gerne vil have at de spil, som er Tal, på en eller anden måde hører sammen. Så vi vil helst ikke skulle forlade verdenen af Tal ved at foretage et træk i et Tal. Dette er grunden til kravet om at samtlige spil i både G^V og G^H er Tal.

Grunden til at den givne ulighed kræves er den intuitive ide, at hvis spillet skal tilføje et antal træk til den ene eller den anden spiller, så må disse ekstra træk opbruges når man foretager et træk i spillet, og at opbruge et træk svarer til at nærme sig 0 (hvis for eksempel $G > 0$ og $G_1 > 0$ svarer $G_1 < G$ jo til at G_1 er tættere på 0 end G er).

Man kan også vise (men det vil vi ikke gøre her) at hvis G_1 og G_2 er Tal, så er enten $G_1 \leq G_2$ eller $G_2 \leq G_1$ (så vi kan altid sammenligne Tal), og samtidig er $-G_1$ og $G_1 + G_2$ også Tal (alle disse egenskaber er klart ting vi bør kræve hvis noget skal kunne kaldes Tal).

En yderligere begrundelse for at ovenstående er en god definition af Tal er, at der findes en måde at gange Tal sammen på (se Opgave 3.14), og hvis man tager mængden af alle Tal, med vores addition og denne multiplikation, så får man noget der opfører sig præcis som de rationelle tal, hvor nævneren er en potens af 2 (og hvis man fjerner kravet om at mængderne G^V og G^H er endelige får man samtlige reelle tal, plus en masse ekstra).

Opgave 3.9. Vis at hvis n er et naturligt tal, så er spillene n og $-n$ (defineret tidligere) Tal.

Opgave 3.10. Vis at spillet $\frac{1}{2}$ (defineret tidligere) er et Tal.

Opgave 3.11. Find Tal G_1 og G_2 så spillet $G = \{G_1 \mid G_2\}$ er et Tal med $0 < G < \frac{1}{2}$ og sådan så $G + G = \frac{1}{2}$.

Opgave 3.12. Vis at hvis n er et naturligt tal så er $n + (-n) = 0$ (som kombinatoriske spil).

Opgave 3.13. Vis at $\{\frac{1}{2} \mid 1 + \frac{1}{2}\} = 1$.

Opgave 3.14. Hvis $G_1 = \{G_1^V \mid G_1^H\}$ og $G_2 = \{G_2^V \mid G_2^H\}$ er Tal, vil vi definere en multiplikation af G_1 og G_2 ved følgende. Husk konventionerne fra da vi definerede addition. Vi vil yderligere udvide denne konvention til summer of produkter med mængder på begge sider ved at lade $A + B$ være foreningen af alle mængderne $a + B$ for elementer $a \in A$ (og tilsvarende for produkter). Så for eksempel er $\{a_1, a_2\} + \{b_1, b_2\} = \{a_1 + b_1, a_1 + b_2, a_2 + b_1, a_2 + b_2\}$.

$$(G_1 \times G_2)^V = G_1^V \times G_2 + G_1 \times G_2^V - G_1^V \times G_2^V \cup G_1^H \times G_2 + G_1 \times G_2^H - G_1^H \times G_2^H$$

$$(G_1 \times G_2)^H = G_1^V \times G_2 + G_1 \times G_2^H - G_1^V \times G_2^H \cup G_1 \times G_2^V + G_1^H \times G_2 - G_1^H \times G_2^V$$

1. Vis at der for ethvert Tal G gælder at $0 \times G = 0$.

2. Vis at der for ethvert Tal G gælder at $1 \times G = G$. (Hint: Lav induktion på fødselsdagen for G).

3. Definer som tidligere $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$ og $2 = \{1 \mid \emptyset\}$. Vis at $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

3.3 Dominerede muligheder

Hvis G_1 og G_2 er spil, så kan det forekomme som en ret uoverskuelig opgave at bestemme om $G_1 = G_2$, da vi i så fald skulle kigge på $G = G_1 - G_2$ og finde ud af om dette er af type $\mathcal{F}$, hvilket jo betyder at vi skal gennemgå samtlige muligheder i G^V og G^H og checke at de alle sammen er af passende typer.

Heldigvis er der visse måder at fjerne muligheder fra G^V og G^H uden at ændre på spillet. Ideen er meget enkel: Hvis der er en mulighed i G^V eller G^H som en spiller aldrig ville benytte (fordi der er andre muligheder der er bedre), så ændrer det ikke på spillet hvis vi fjerner den. Lad os gøre dette præcist i en sætning og bevise denne.

Sætning 3.15. *Lad $G = \{G^V \mid G^H\}$ være et kombinatorisk spil med $G^V = \{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ og $G^H = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_m\}$. Lad $G_1^V = \{V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ og $G_2^H = \{H_2, H_3, \ldots, H_m\}$. Definer $G_1 = \{G_1^V \mid G^H\}$ og $G_2 = \{G^V \mid G_2^H\}$.*

1. *Hvis $V_2 \geq V_1$ så er $G = G_1$.*

2. *Hvis $H_2 \leq H_1$ så er $G = G_2$.*

Bevis. Vi vil nøjes med at bevise det ene udsagn, da beviset for det andet er magen til, bare med visse ting byttet rundt.

Vi antager at $V_2 \geq V_1$ og skal vise at $G = G_1$, altså at $G - G_1$ er af type $\mathcal{F}$.

Bemærk at Venstres muligheder i $-G_1$ er $\{-H_1, -H_2, -H_3, \ldots, -H_m\}$ og at Højres muligheder er $\{-V_2, -V_3, \ldots, -V_n\}$

Antag først at Højre starter. Hvis Højre vælger en af mulighederne i G, så må denne mulighed være H_i for et passende i. Men nu har venstre muligheden $-H_i$ fra $-G_1$, hvilket resulterer i $H_i - H_i = 0$, så Venstre vinder.

Tilsvarende, hvis Højre vælger en af mulighederne i $-G_1$, så må denne være $-V_i$ for et passende i (nu med $i \geq 2$). Men nu har Venstre muligheden V_i fra G, og igen er resultatet $V_i - V_i = 0$ så Venstre vinder.

Hvis Venstre starter er der igen to muligheder. Hvis Venstre vælger en mulighed fra $-G_1$, så må denne være $-H_i$ for et passende i, og Højre har muligheden H_i, hvilket som før giver 0 hvorved Højre vinder.

Det samme er tilfældet hvis Venstre vælger en mulighed V_i fra G som ikke er V_1, da Højre i så fald har $-V_i$ som mulighed.

Det eneste tilfælde der er tilbage er hvis Venstre vælger V_1. Men nu kan Højre vælge $-V_2$, og antagelsen var jo at $V_2 \geq V_1$, så $V_1 - V_2 \leq 0$, hvorved Højre igen vinder. □

Denne sætning gør at når vi kigger på et spil, så kan vi ofte fjerne mange af de muligheder der ellers ville være, hvilket gør at der bliver færre muligheder at kigge igennem, når vi skal bestemme typen af spillet. De muligheder vi kan fjerne ved hjælp af sætningen kaldes dominerede.

Det blev tidligere nævnt at mange af de spil man kan lave, som har fødselsdag 2, faktisk er ens. Ovenstående sætning er en god måde at se hvorfor dette er tilfældet, da de fleste af de spil, der har fødselsdag 1 kan sammenlignes, så man sjældent har brug for mere end en mulighed i hver af G^V og G^H.

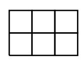
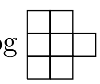
Opgave 3.16. Find et spil G med fødselsdag 2, som har to muligheder i både G^V og G^H, og som ikke indeholder nogen dominerede muligheder.

Vis at G er af type $\mathcal{N}$ og at $G + G = 0$.

Opgave 3.17. I denne opgave må du gerne benytte at hvis G_1 og G_2 er Tal, så er enten $G_1 \geq G_2$ eller $G_2 \geq G_1$.

Vis at hvis G er et Tal, så findes der Tal G_1 og G_2 så $G = \{G_1 \mid G_2\}$ (altså så Venstre og Højre hver kun har en mulighed i G).

Opgave 3.18. Opskriv Domineering-positionerne

 og 

i den formelle notation og fjern de dominerede muligheder.

3.4 Valg af summand

Indtil videre har vi mest fokuseret på hvordan man analyserer de enkelte komponenter i en sum af spil og kigget på hvilke træk man skal overveje, når man har bestemt i hvilken summand man vil foretage sit træk.

I denne sektion vil vi se nærmere på hvordan man kan vælge den summand, hvor det bedst kan betale sig at foretage et træk. Vi vil ikke kunne give en præcis beskrivelse af dette, men vi kan give nogle generelle ting man bør kigge efter, og samtidig vise at der er visse typer af summander man ikke bør foretage sine træk i.

Lad os starte med at vise at visse spil kan udelukkes fra overvejelserne, når man skal finde en summand at foretage sit træk i.

Sætning 3.19. *Lad G være et kombinatorisk spil med $G = G_1 + G_2$, hvor G_1 er et Tal og G_2 ikke er et Tal. Hvis den ene af spillerne har en vindende strategi som startende spiller i G, så har denne spiller en vindende strategi som starter med et træk i G_2.*

Bevis. Vi vil gøre dette ved induktion på fødselsdagen for G_1.

Induktionsstarten er klar, da denne er tilfældet hvor $G_1 = 0$.

Per symmetri skal vi blot bevise at udsagnet gælder for Venstre. Antagelsen er altså at Venstre kan vinde som startende spiller, og vi kan antage at Venstre kan gøre dette med et træk i G_1 (ellers ville vi jo være færdige). Vores induktionsantagelse er at hvis Venstre kan vinde some startende spiller i et spil af formen $G_1' + G_2$ hvor G_1' er et Tal med mindre fødselsdag end G_1, så kan Venstre gøre dette ved at starte med et træk i G_2.

Der er altså et spil G_3 i G_1^V så $G_3 + G_2 \geq 0$. Men da G_2 ikke er et Tal og G_3 er et Tal, kan vi ikke have $G_3 = -G_2$, så vi må faktisk have $G_3 + G_2 > 0$. Men dette betyder at Venstre kan vinde dette spil som startende spiller, og da $fd(G_3) < fd(G_1)$ får vi per induktionsantagelsen, at Venstre kan vinde dette spil med et træk i G_2. Der er altså et spil G_4 i G_2^V så $G_3 + G_4 \geq 0$. Men da G_1 er et Tal og G_3 er et spil i G_1^V, har vi at $G_1 > G_3$, hvilket giver at $G_1 + G_4 > G_3 + G_4 \geq 0$, så Venstre kan vinde $G_1 + G_2$ ved at foretage trækket G_4 i G_2, hvorved vi har vist det ønskede. $\square$

Den måde man så kan bruge denne sætning på er, at man finder de spil i ens sum, som er Tal, og ignorer så disse når man skal vælge hvor man vil foretage sit træk (givet at summen af de resterende ikke er et Tal).

Efter at have udelukket alle de spil, som er Tal, kan der selvfølgelig stadig være en masse spil tilbage, og hvordan skal vi kunne vælge mellem disse? Dette er langt fra et let spørgsmål at besvare, men vi kan dog give visse ideer om hvordan man finder ud af det.

Læg mærke til, at på grund af overstående sætning, så kan vi antage at når vi analyserer en given summand, så stopper spillet i den summand, hvis man når til et Tal (da man jo så bør fokusere på de andre summander). For at få en ide om hvor attraktivt et givet spil er at foretage et træk i, definerer vi venstre- og højre-stop for spil som følger.

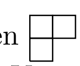
Definition 3.20. Lad $G = \{G^V \mid G^H\}$ være et kombinatorisk spil. Vi definerer venstre-stoppet for G, skrevet $\mathbf{VS}(G)$ og højre-stoppet skrevet $\mathbf{HS}(G)$ til at være

$$\mathbf{VS}(G) = \begin{cases} G & \text{hvis } G \text{ er et Tal} \\ \max\limits_{G' \in G^V} \{\mathbf{HS}(G')\} & \text{ellers} \end{cases}$$

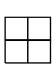
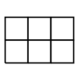
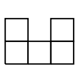
$$\mathbf{HS}(G) = \begin{cases} G & \text{hvis } G \text{ er et Tal} \\ \min\limits_{G' \in G^H} \{\mathbf{VS}(G')\} & \text{ellers} \end{cases}$$

Ideen med denne definition er at $\mathbf{VS}(G)$ er det bedste Tal Venstre kan forvente at opnå ved at begynde at spille i G. Tilsvarende er $\mathbf{HS}(G)$ det bedste Tal Højre kan opnå ved at spille i G (husk at Højre foretrækker små, dvs. gerne negative, Tal). Definitionen er i orden (på trods af den rekursive natur), siden man hver gang man ikke er færdig (dvs hver gang man ikke er nået til et Tal), kun kigger på spil med mindre fødselsdag end man havde før. Og på et eller andet tidspunkt slutter man, da det eneste spil med fødselsdag 0 er spillet 0, som er et Tal.

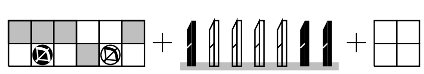
For et givet spil G kan man så se på $\mathbf{VS}(G) - \mathbf{HS}(G)$ (dette vil altid være et ikke-negativt Tal, men dette vil vi ikke vise her). Jo større dette Tal er, jo vigtigere er det at foretage et træk i G før ens modstander gør det.

For eksempel, hvis vi tager G til at være Domineering-positionen  så får vi $\mathbf{VS}(G) = 0$ og $\mathbf{HS}(G) = 0$ (da G ikke er et Tal, men den eneste mulighed for både Venstre og Højre er Tallet 0), så i dette tilfælde får vi at $\mathbf{VS}(G) - \mathbf{HS}(G) = 0$ (dvs. at spillet er mere attraktivt end et Tal ville være, da vi jo aldrig bør trække i Tal, men kun lige netop).

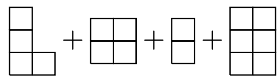
Opgave 3.21. Find $\mathbf{VS}(G) - \mathbf{HS}(G)$ når G er følgende Domineering-positioner.

1. 
2. 
3. 

Opgave 3.22. Find typen af følgende sum af positioner i Amazons, Toppling Dominoes og Domineering:

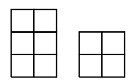


Opgave 3.23. Betragt følgende sum af Domineering-positioner:



Identificer de summander, som er Tal, og vis at summen af de resterende ikke er et tal. Find typen af spillet og verificer, at hvis man benytter metoden med at finde forskellen mellem venstre- og højrestop til at finde de summander, man vil trække i (og ignorer alle andre muligheder), så leder dette til samme konklusion.

Opgave 3.24. Betragt Domineering-positionen



Vis at metoden med at finde forskellen mellem venstre- og højrestop for summanderne leder til den bedste strategi både for Venstre og Højre. (Hint: Prøv at lægge passende tal til spillet på en sådan måde at denne strategi er den eneste der lader Venstre vinde, og tilsvarende for Højre).

Appendiks

A Mængder

Mængder vil dukke op en del steder i disse noter. Vi vil ikke få brug for at vide specielt meget om mængder, men der er en del notation som vil blive benyttet, og som derfor vil blive defineret i dette appendiks.

En mængde er en samling af objekter, hvor samme objekt ikke optræder mere end en gang. Vi benytter $\{\}$ til at angive mængder, og adskiller elementerne i mængder med kommaer. Så for eksempel vil vi skrive $\{1, 2, 3\}$ for mængden der indeholder elementerne 1, 2 og 3. Vi er ligeglade med rækkefølgen elementerne er blevet skrevet i, så for eksempel har vi $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$.

I stedet for ikke at tillade at samme element optræder flere gange når vi skriver mængder, vil vi bare sige at disse mængder er ens, så vi for eksempel har $\{1, 2, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$. Grunden til dette er at det nogle gange kan være svært på forhånd at afgøre om visse elementer er ens, så for ikke at få disse problemer tillader vi at skrive mængder, hvor samme element optræder flere gange, men vi ignorerer de ekstra gange det optræder (dette betyder så til gengæld at man skal være lidt forsigtig hvis man vil tælle antallet af elementer i en mængde, da man jo i så fald er nødt til kun at tælle de forskellige).

Hvis elementet a ligger i mængder A skriver vi $a \in A$, så for eksempel er $1 \in \{1, 2, 3\}$ men der gælder *ikke* $4 \in \{1, 2, 3\}$.

Hvis alle elementer i mængden A også ligger i mængden B, så siger vi at A er en delmængde af B, og vi skriver $A \subseteq B$. For eksempel er $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ (men bemærk at også $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, så delmængder må godt indeholde det hele). Der gælder til gengæld *ikke* $\{1, 4\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

Bemærk også at hvis der både gælder $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$, så har vi $A = B$.

Hvis vi har to mængder A og B, så er der et par måder vi kan kombinere dem på for at få en ny mængde.

Vi kan lave den mængde, som indeholder alle elementer der er i enten A eller B (eller i begge). Denne kaldes foreningen af A og B og skrives $A \cup B$. For eksempel er $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Vi kan også lave den mængde, som indeholder de elementer der er i både A og B. Denne kaldes fællesmængden af A og B (eller snittet af A og B), og skrives $A \cap B$. For eksempel er $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

Endelig kan vi lave den mængde, som indeholder de elementer i A, der ikke også er i B. Denne kaldes forskellen mellem A og B, og skrives $A \setminus B$. For eksempel er $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$.

Bemærk at der ikke er noget krav om at en mængde indeholder nogen elementer. Hvis en mængde ikke indeholder nogen elementer, kalder vi mængden for tom. Hvis A og B begge er tomme, så er $A = B$ (da ingen af dem indeholder nogen elementer har de jo præcis de samme elementer). Da alle tomme mængder derfor er ens vil vi blot skrive $\emptyset$ for den tomme mængde (i stedet for $\{\}$).

B Induktion

Induktion er en utrolig nyttig bevismetode, som vil blive benyttet til at vise visse sætninger i disse noter. Visse af opgaverne vil også kræve at man benytter induktion.

Et induktionsbevis kan bruges til at vise at visse ting gælder for alle naturlige tal, eller for alle naturlige tal større end et givet tal.

For at bevise at noget gælder for alle naturlige tal m med $m \geq k$ (for et givet k) ved induktion skal man gøre følgende: Først viser man at udsagnet gælder for k. Dernæst viser man, at hvis udsagnet gælder for et naturligt tal n, så gælder det også for $n+1$ (hvor det eneste man her må antage om n er at det er et naturligt tal, med $n \geq k$). Hvis man kan gøre dette vil man have vist at udsagnet gælder for alle naturlige tal m med $m \geq k$.

Der er også en lidt anderledes version af induktion, som nogle gange er mere praktisk. Den starter på samme måde med at man viser udsagnet for k. Men derefter skal man vise at udsagnet gælder for et vilkårligt naturligt tal n, med $n > k$, under antagelse af at udsagnet gælder for alle naturlige tal l med $k \leq l < n$. Dette vil også vise at udsagnet gælder for alle naturlige tal m med $m \geq k$, og det kan være en mere praktisk måde, siden man har lov til at antage mere end man kunne i den anden version.

Intuitionen for hvorfor ovenstående beviser virker er følgende: Vi har vist at det gælder for k, så det gælder også for $k+1$. Da det gælder for $k+1$ gælder det også for $k+2$ (i den anderledes version er det fordi det gælder for både k og $k+1$ at det gælder for $k+2$), og så fremdeles.

Mere formelt kan man faktisk matematisk bevise at induktionsbeviser virker, ved at benytte observationen at enhver delmængde af de naturlige tal har et mindste element (vi vil ikke inkludere beviset her). Denne observation kan faktisk også bevises i det setup som de fleste matematikere benytter, men dette går langt ud over vores behov.

Eksempel B.1. Vi ønsker at vise ved induktion at der for ethvert naturligt tal m med $m \geq 1$ gælder at

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Hvis $m = 1$ er udsagnet at $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, hvilket klart er sandt.

Vi antager nu at udsagnet er sandt for et vilkårligt naturligt tal n med $n \geq 1$, altså at

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

og vi ønsker at vise at så er udsagnet også sandt for $n+1$, altså at

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Vi ser at

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$$

og vores antagelse var jo at

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

så vi kan sætte dette ind og få

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Hvis vi nu omskriver $(n+1) = \frac{2(n+1)}{2}$ og sætter dette ind får vi

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

som var det vi ville vise.

Da vi nu har vist at udsagnet er sandt for $m = 1$ og at det er sandt for $n+1$ under antagelse af at det er sandt for n, så har vi per induktion vist at det er sandt for alle $m \geq 1$.

C Spilleregler

I dette appendiks vil vi gennemgå reglerne for en række kombinatoriske spil. Visse af disse vil blive benyttet til eksempler og opgaver i noterne, mens andre blot er med for at de særligt interesserede kan se flere eksempler.

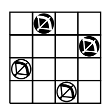
Amazons

Amazons spilles på et rektangulært ternet bræt, med brikker der kaldes Amazoner (disse kan være sorte eller hvide). Brættet kan også indeholde ødelagte felter.

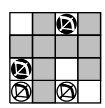
Den ene spiller styrer de sorte Amazoner og den anden styrer de hvide Amazoner. En Amazone bevæger sig som en dronning i skak (altså et vilkårligt antal felter i lige linje), og hver gang en Amazone har flyttet, kaster den sit spyd på samme måde, og der hvor spyden rammer, bliver feltet ødelagt.

Hverken Amazoner eller spyd kan flytte igennem eller ind i ødelagte felter, og den første spiller, der ikke har et lovligt træk, taber (en del af et lovligt træk er at kaste spyddet, men hvis det er muligt at flytte en brik vil man altid kunne kaste spyddet, da man om ikke andet kan kaste det til det felt man startede på).

En typisk startopstilling kunne være



og en typisk stilling hvor den, der spiller sort, ikke har et lovligt træk kunne være



Clobber

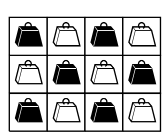
Clobber spilles på et rektangulært ternet bræt, hvor hvert felt enten er tomt eller har en sort eller hvid brik.

Den ene spiller foretager et træk ved at flytte en sort brik til et tilstødende felt som indeholder en hvid brik, og fjerne den hvide brik (felter er ikke tilstødende langs diagonaler).

Den anden spiller foretager træk på samme måde med sort og hvid byttet om.

Spillet slutter når ingen af spillerne har et lovligt træk.

En typisk opstilling fra starten vil være med brikkerne skiftevis som for eksempel

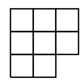
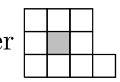


Domineering

Domineering spilles på bræt delt op i kvadrater. Spillerne skiftes til at placere en dominobrik på brættet, som dækker to felter ved siden af hinanden. Den ene spiller placerer sine brikker så de dækker felter vertikalt og den anden spiller placerer sine brikker horisontalt. Brikker skal placeres inden for brættet, og må ikke lappe over hinanden.

Den første spiller, som ikke kan placere en brik, har tabt.

Bemærk at brættet ikke behøver at være kvadratisk, eller for den sags skyld rektangulært. For eksempel kan man spille på et bræt af formen

 eller 

Toppling Dominoes

Toppling Dominoes består af en række dominobrikker der står op. Disse kan være sorte, hvide eller grå. Den ene spiller foretager et træk ved at vælte enten en af de sorte eller en af de grå brikker mod enten venstre eller højre. Alle brikker i den valgte retning vælter også og fjernes. Den anden spiller foretager træk på samme måde, men han kan vælge enten hvide eller grå brikker at vælte.

Den første spiller, der ikke har et lovligt træk, taber.

Toppling Towers

Toppling Towers er en variant af Toppling Dominoes, hvor man i stedet for dominobrikker bruger små tårne (i samme farver), og spiller på et rektangulært ternet bræt. De to spillere kan vælge brikker at vælte på samme måde som i Toppling Dominoes, men nu kan de væltes i fire retninger. Hvis der er et hul i en række, vil brikker kun vælte til de møder dette hul. Startopstillingen kan nu også indeholde tomme felter.

Som i Toppling Dominoes spilles der indtil en spiller ikke har et lovligt træk, og denne spiller taber.